

对流扩散方程的拟谱格式稳定性分析及扩稳方法

詹飞龙, 张楚华

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对拟谱方法在高雷诺数下的格式非稳定性问题,通过特征分析及算例验证系统研究对流扩散方程的拟谱方法稳定性,重点采用罚方法处理边界条件来拓宽稳定性范围.研究表明:拟谱方法在处理强约束边界条件时稳定性条件苛刻,是无法计算高雷诺数问题的根本原因;罚方法处理后的边界条件问题可以将拟谱方法的稳定范围扩宽1~3个数量级,极大地提高了拟谱方法所能求解的雷诺数上限;此外,罚方法还能保持拟谱方法的高精度优点,对减少计算时间亦有裨益.研究工作对流动传热传质方程的拟谱格式的数学特性分析及设计具有理论指导意义.

关键词: 对流扩散方程;拟谱方法;稳定性分析;罚方法;高雷诺数

中图分类号: O357 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2012)03-0113-06

Stability Analysis and Stability Widening Method for Pseudospectral Schemes of Advection-Diffusion Equation

ZHAN Feilong, ZHANG Chuhua

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The schemes of the pseudospectral method are instable at high Reynolds numbers. In this study, the scheme stability of the advection-diffusion equation was investigated through the eigenvalue analysis theory and the numerical example verification. The emphasis was laid on using the penalty method to handle the boundary conditions for the purpose of widening the stability range of the pseudospectral schemes at high Reynolds numbers. The results show that the stability conditions under strongly restrained boundary conditions are so hard that the schemes will fail at high Reynolds numbers. However, when the penalty method is adopted to handle the boundary conditions, the stability range can increase by 1-3 orders of magnitude and the upper limit of Reynolds numbers can rise significantly. In addition, the penalty method can keep the high accuracy property of the pseudospectral method and is helpful in reducing the computational cost. The present study may be of theoretical importance for the mathematical analysis and design of the pseudospectral schemes in the numerical simulation of heat and mass transfer and fluid flow governing equations.

Keywords: advection-diffusion equation; pseudospectral method; stability analysis; penalty method; high Reynolds number

对流扩散问题是流体力学、传热学、传质学等学科以及环境、化工等应用领域中经常遇到的典型问题之一,对流扩散方程的高精度数值解法是计算流

体力学、数值传热学的基础性问题,也是该领域的国际前沿课题.拟谱方法因其特有的高精度优点而非常适合于流动机理研究,目前限制拟谱方法应用范

围的瓶颈是高雷诺数 Re 下的格式非稳定性问题. 早在 20 世纪 70 年代后期, Gottlieb 等^[1-2]在利用拟谱方法求解对流扩散方程时就发现了一种特别的数值不稳定性现象: 当在拟谱离散算子中强制施加边界条件时, 对于高 Re 计算都存在临界配置点数, 如果配置点数小于该临界值, 算子的解将是无界的, 此时无论时间步长取多么小, 拟谱算子的时间离散格式都是发散的. 后续的研究工作均证实了边界条件的强制性处理方式对于高 Re 计算具有很大的约束限制. Olivier^[3]在研究封闭方腔自然对流问题时发现, 强边界条件约束下若不通过增加配置点数, 则很难计算高 Re 的流动, Zheng 等^[4]也同样发现高 Re 会对时间步长提出十分苛刻的要求. 因此, 改进拟谱方法的边界条件数值处理格式, 使其能适应高 Re 的计算, 同时还能保持拟谱方法的高精度特性, 具有重要的学术价值和应用前景.

本文在前期 Chebyshev 拟谱格式^[5-6]研究基础上, 采用特征分析及算例验证相结合的研究方法, 系统地研究对流扩散方程的 Chebyshev 拟谱方法的稳定性及其扩稳问题, 重点针对高 Re 计算展开研究. 首先对半离散拟谱算子(空间离散但时间连续)进行特征分析, 得出临界配置点数与 Re 之间的关系式, 同时给出高 Re 情况下容易出现发散现象的合理解释. 然后, 采用能够部分甚至完全避免出现这种不稳定性现象的罚方法来处理边界条件. 罚方法最早是由 Funaro 等^[7]提出的, 主要用来提高某些偏微分方程的计算精度, 而后由 Hesthaven^[8]做出一些改进用来简化稳定性分析. 对于应用拟谱方法求解流动问题, 通常都是要求在内节点上满足方程, 在边界点上满足边界条件, 没有考虑到在边界点上也应该满足方程, 罚方法处理后的边界条件使得在边界处能无限地接近满足方程, 这样就能使问题的适定性得到改进. 该方法在近几年得到了一些发展, 国内学者赵廷刚^[9]利用罚方法处理一些非经典方程, Zhang^[10]利用罚方法求解一类最优控制问题, 都证实了该方法在保证计算精度上的优势. 为了体现罚方法对提高拟谱格式稳定性的作用, 本文结合两种时间离散格式, 半隐 Adams-Bashforth 向后差分格式以及显式三阶 Runge-Kutta 格式, 数值验证该方法对提高稳定性、保持高精度、缩短计算时间等方面的有效性. 研究工作将为高 Re 流动的高精度计算奠定理论基础.

1 对流扩散方程及其空间拟谱格式

1.1 对流扩散方程与边界条件

一维对流扩散方程如下

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

$$-L < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

将方程进行无量纲化, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{St} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{StRe} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S$$

$$-1 < x < 1, \quad t > 0 \quad (2)$$

相应的边界条件与初始条件为

$$\alpha_D u(-1, t) + \alpha_N \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t) = h(t) \quad (3)$$

$$\beta_D u(1, t) + \beta_N \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = g(t) \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (5)$$

式中包含两个无量纲数 $St = \frac{L}{Ta}$ 、 $Re = \frac{aL}{\nu}$, L 为特征长度, a 为特征速度, T 为特征时间, ν 为扩散系数; f 和 S 分别为有量纲与无量纲源项; 参数 α_D 、 α_N 、 β_D 、 β_N 与边界条件类型有关. 本文考虑第一类边界条件, 即 $\alpha_N = \beta_N = 0$.

1.2 空间拟谱格式

采用 Chebyshev 拟谱方法进行空间导数项的数值离散. 以 Chebyshev 正交多项式作为基函数, 则在 $[-1, 1]$ 上任何变量 φ 都可表示成

$$\varphi(x_i) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x_i) \quad (6)$$

式中: a_k 为展开系数; 配置点选择为 Gauss-Lobatto 点 $x_i = \cos(\pi i/N)$, $i = 0, \dots, N$. 1 阶和二阶导数均可以利用 Chebyshev 微分矩阵来计算

$$\varphi'(x_i) = \sum_{j=0}^N d_{i,j} \varphi(x_j), \quad i = 0, \dots, N \quad (7)$$

$$\varphi''(x_i) = \sum_{j=0}^N (d_{i,j})^2 \varphi(x_j) \quad i = 0, \dots, N \quad (8)$$

$$d_{0,0} = -d_{N,N} = \frac{2N^2 + 1}{6} \quad (9)$$

$$d_{i,j} = \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_j} (-1)^{i+j} \left/ 2 \sin \left[\frac{(j+i)\pi}{2N} \right] \sin \left[\frac{(j-i)\pi}{2N} \right] \right.$$

$$0 \leq i, j \leq N, \quad i \neq j \quad (10)$$

$$d_{i,i} = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N d_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (11)$$

$$\bar{c}_i = \begin{cases} 2, & i = 0 \text{ 或 } N \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

从式(7)、(8)可以看出, 变量在任意配置点上的导数

是同一方向所有配置点上变量值的加权平均.

2 半离散方程的拟谱算子特征分析

利用式(7)、(8),方程(2)的半离散形式为

$$\partial_t \mathbf{U}_N = \mathbf{L}_N \mathbf{U}_N + \mathbf{S}_N, \quad t > 0 \tag{13}$$

$$\mathbf{U}_N(t) = (u_N(x_1, t), \cdots, u_N(x_i, t), \cdots, u_N(x_{N-1}, t))^T \tag{14}$$

$$\mathbf{L}_N = -\frac{1}{St} \mathbf{D}^{(1)} + \frac{1}{StRe} \mathbf{D}^{(2)} \tag{15}$$

其中空间导数项已用拟谱格式离散,而时间导数项仍为连续形式,这样能够首先单独分析拟谱格式的稳定性. $u_N(x, t)$ 为函数 u 的 N 次展开式,其在配置点上的数值解写成了列向量形式 $\mathbf{U}_N(t)$,它由 $N-1$ 个分量(即内配置点上的变量值)组成,而在两端边界点上 $u_N(x_0, t)$ 、 $u_N(x_N, t)$ 由边界条件计算出. $\mathbf{S}_N$ 为离散源项, $\mathbf{L}_N$ 为对流扩散方程的拟谱离散算子(矩阵), $\mathbf{D}^{(m)}$, $m=1, 2$ 为相应的离散矩阵.

根据 von Neumann 稳定性分析理论,式(13)的稳定性条件是算子 $\mathbf{L}_N$ 的特征值 $\mu_i (i=1, \cdots, N-1)$ 的实部 γ_i 非正,换言之,如果存在一个特征值的实部为正数,则格式对于任何时间离散格式都将是不稳定的.

经过繁琐但也是常规的矩阵运算,可以得到算子 $\mathbf{L}_N$ 特征值的最大实部与 Re 、配置点数 N 之间的关系,如图 1 所示.可以看出,当 $N \leq 7$ 时,无论 Re 多大,算子特征值的实部均非正,而当 $Re > 100$ 时,总存在一个临界配置点数 N_c ,使得当 $7 < N \leq N_c$ 时有正的特征值实部.因此,对于 $Re > 100$, N 要大于 N_c 算子才是稳定的.表 1 给出了 Re 与 N_c 的对应关系,它们可以按如下近似关系式计算

$$N_c = (0.695Re)^{0.54} \tag{16}$$

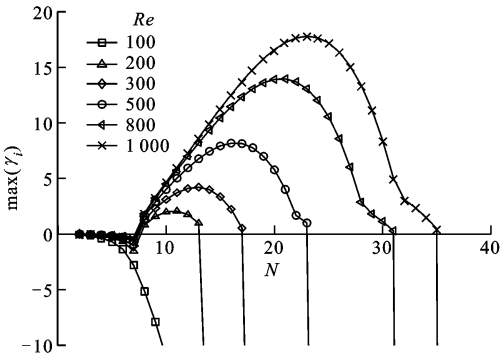


图 1 不同 Re 下特征值的最大实部与 N 的关系

表 1 Re 与 N_c 之间的关系

Re	200	300	500	800	1 000
N_c	14	18	24	32	36

进一步分析可以发现,这种不稳定性现象与边界条件有关.根据对流扩散方程的解析解,当 $Re \gg 100$ 时(不妨假设流动速度为正),在 $x=1$ 附近出现明显的边界层现象,需要足够多的配置点数才能正确地求出数值解,而且 Re 越大,出口附近边界层越薄,需要的配置点数也越多.极限情况下,当 Re 为无穷大时,式(2)退化为两端都给定边界条件的纯对流问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{St} \frac{\partial u}{\partial x} = S$$

$$-1 < x < 1, \quad t > 0 \tag{17}$$

$$u(-1, t) = h(t) \tag{18}$$

$$u(1, t) = g(t) \tag{19}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{20}$$

显然式(17)~(20)为过定问题,一般没有解.因此,对于高 Re 问题,有必要改变 $x=1$ 处边界条件的处理方式,使它不再强制地满足 $u(1, t)=g(t)$,而是尽量能够从方程本身出发来得到解,这就是罚方法处理边界条件的基本出发点.

3 边界条件的罚方法

Funaro 等^[7]首次提出了罚方法,最初目的是为了提高某些微分问题解的精度.本文将罚方法应用在对流扩散问题的边界条件处理上,目的是提高高 Re 问题的拟谱格式稳定性.此时,式(2)~(5)变换为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{St} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{StRe} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S \tag{21}$$

$$u(-1, t) = h(t) \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(1, t) + \frac{1}{St} \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) - \frac{1}{StRe} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, t) -$$

$$S(t) + \alpha[u(1, t) - g(t)] = 0 \tag{23}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{24}$$

式中: α 是罚系数,其值可正可负.

此时式(13)中的 $\mathbf{U}_N$ 包含 $u_N(x_0, t)$,有 N 个未知变量而不再是 $N-1$ 个,算子 $\mathbf{L}_N$ 有 N 个特征值.通过对算子的特征值数值分析,可以得到所允许的最大罚系数值,以保证算子所有特征值的实部都为非正数,如图 2 所示, α_c^+ 为正的最大罚系数, α_c^- 为负的最大罚系数.从图 2 可以得出不同的 Re 所允许的 α 值与 N 之间的关系,在 $\alpha_c^- < \alpha < \alpha_c^+$ 之间,格式都是稳定的,其中 α_c^- 和 α_c^+ 由 Re 和 N 决定.在同样的 N 下, Re 越高, α 越小,罚项在边界条件中所占的比重也就越小,边界处的值也就越趋向于由方程本身来得到,反之亦然.

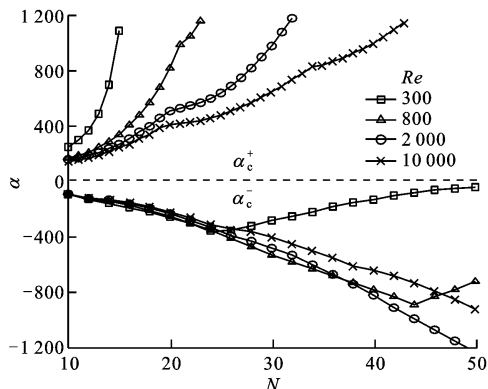


图2 不同 N 和 Re 下稳定性条件要求的
罚系数取值范围

4 算例验证

本节通过两种常用的时间离散格式来验证上述拟谱格式的稳定性分析及罚方法扩稳的有效性,同时考察罚方法对计算精度、计算时间的影响.假设方程(2)的一个精确解为

$$u_e(x, t) = \frac{2\pi - 1 + \sin 2\pi t}{2\pi} \sin\left[\frac{3}{4}\pi(x+1)\right] \quad (25)$$

代入式(2)~(5)可得源项 S 和定解条件中 h 、 g 、 u_0 的具体表达式. 计算区域为 $-1 \leq x \leq 1$, 对流系数 $a = 1$, 则 $St = \frac{L}{Ta} = 1$, 这样就可以单独研究 Re 在不同时间离散格式、不同边界条件处理方法下的情形. 本文采用 L_2^n 误差来考察时间层 n 上数值解的准确性

$$L_2^n = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} |u_N^n(x_i, n\Delta t) - u_e(x_i, n\Delta t)|^2 \right)^{1/2} \quad (26)$$

4.1 半隐式 Adams-Bashforth 向后差分格式

采用半隐式 Adams-Bashforth 时间向后二阶差分格式(AB/BDI2)得到的方程(2)的离散形式为

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{2}{St} \frac{\partial u^n}{\partial x} - \frac{1}{St} \frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} - \frac{1}{StRe} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} = S^{n+1} \quad (27)$$

再结合 Chebyshev 空间拟谱格式, 可以获得方程(27)的完全离散方程

$$\mathbf{A}U_N^{n+1} + \mathbf{B}U_N^n + \mathbf{C}U_N^{n-1} = \mathbf{F}_N^{n+1} \quad (28)$$

对于强制性边界条件处理方法(式(18)、(19)), $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 是 $(N-1) \times (N-1)$ 矩阵, 方程(28)可转换成

$$\boldsymbol{\phi}_N^{n+1} = \boldsymbol{\Phi}_N^n \quad (29)$$

其中

$$\boldsymbol{\phi}_N^n = (\mathbf{U}_N^n, \mathbf{U}_N^{n-1})^T$$

稳定性条件要求 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的所有特征值满足 $|\mu_i| \leq 1$. 通过数值分析, 可以得到不同 N 下的稳定性区域图(图3), 其中 $\Delta t_{\max}$ 为稳定性条件要求的最大时间步长. 可知 N 越小, 所能计算到的 Re 上限也越小; N 继续增大对 Re 上限的贡献有限, 与上节的对流扩散算子的特征分析结果相一致; 在相同的 Re 下, N 越大, 相应的网格间距越小, 需要的时间步长也越小.

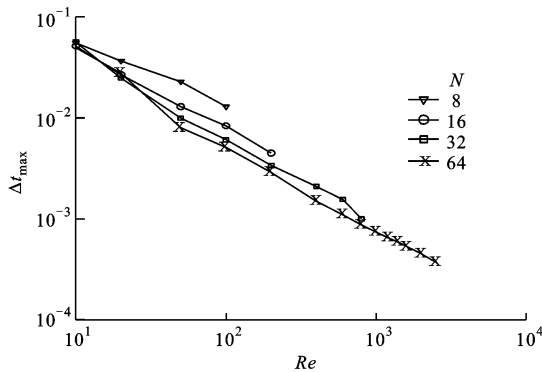


图3 不同 N 时 AB/BDI2 格式的稳定性曲线

对于罚方法处理边界条件的情况(式(22)、(23)), 同样可得方程(29), 但 $\mathbf{U}_N(t) = (u_N(x_0, t), \dots, u_N(x_{N-1}, t))^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 $N \times N$ 矩阵. 通过对 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的特征值分析, 可以得到不同 N 、 Re 和 α 下的稳定性曲线, 图4给出了 $N=32$ 时的计算结果.

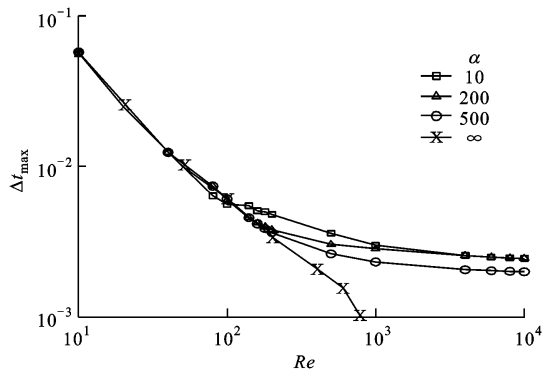


图4 $N=32$ 时不同罚系数下 AB/BDI2
格式的稳定性曲线

$\alpha = \infty$ 表示未使用罚方法, 即采用强制性处理方法. 可以看出, 当 Re 较小时, 罚方法处理边界条件与强制性处理边界条件对稳定性的影响是一致的, 而当 $Re \geq 100$ 时, 罚方法明显地提高了计算格式的稳定性, 提高的幅度可达 2~3 个数量级. 同时, 罚方法使得 Re 的计算上限大大提高.

现在考察两种边界条件的处理方法对数值计算精度、计算时间的影响情况, 这里统一选取计算时间步长 $\Delta t = 0.001$, 计算时间步数为 50 000. 表2给出

了 $Re=2\,000$ 时 AB/BDI2 格式的计算误差与计算时间.

表 2 $Re=2\,000$ 时 AB/BDI2 格式的计算误差与计算时间

N	α	$L_2^{50\,000}$	计算时间/s
8	1 000	发散	
	100	1.00×10^{-4}	2.33
	10	6.88×10^{-5}	2.34
16	1 000	发散	
	100	3.78×10^{-8}	5.19
	10	4.20×10^{-8}	5.14
32	10 000	发散	
	1 000	3.74×10^{-8}	10.50
	100	4.03×10^{-8}	10.56
	10	4.14×10^{-8}	10.55
	∞	4.39×10^{-8}	31.00
64	100 000	4.34×10^{-8}	23.22
	10 000	4.24×10^{-8}	23.30
	1 000	4.07×10^{-8}	23.14
	100	4.08×10^{-8}	23.02
	10	4.08×10^{-8}	23.08

可以看出,在高 Re 下,强制性边界条件处理方法无法计算的场合用罚方法仍能够获得计算结果,且能很好地保持计算精度;用罚方法可以减少约 25%~28% 的计算时间. 表 2 中有几处数据是发散的,表明大的罚系数或强制性边界条件方法的计算过程发散,不满足稳定性条件. 同时也可以看出,在满足条件下的罚系数对精度的影响是很微弱的.

4.2 显式三阶 Runge-Kutta 格式

采用显式三阶 Runge-Kutta 格式(显式 RK3)得到的方程(2)的离散形式为

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t H(u^n) \tag{30}$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t H(u^{(1)}) \tag{31}$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t H(u^{(2)}) \tag{32}$$

式中: $H(u^{(*)})$ 为包括源项在内的空间导数项,其表达式为

$$H(u^{(*)}) = S - \frac{1}{St} \frac{\partial u^{(*)}}{\partial x} + \frac{1}{StRe} \frac{\partial^2 u^{(*)}}{\partial x^2}$$

同样分析该格式在强制性边界条件和罚方法处理边界条件下的稳定性情况. 图 5、6 给出了相应的稳定性曲线,可以看出,显式 RK3 格式处理对流扩散方程稳定性的影响情况与 AB/BDI2 格式基本相同,但不同的是随着 Re 的增大,临界时间步长 Δt 先增

大后减小. 罚方法处理边界条件同样可以很明显地提高稳定性,提高幅度较 AB/BDI2 格式低些,为 30%~100%,而 Re 的计算上限也同样大大提高. 表 3 给出了 $Re=2\,000$ 时两种边界条件处理对显式 RK3 格式计算的影响情况,从中看出,罚方法在低

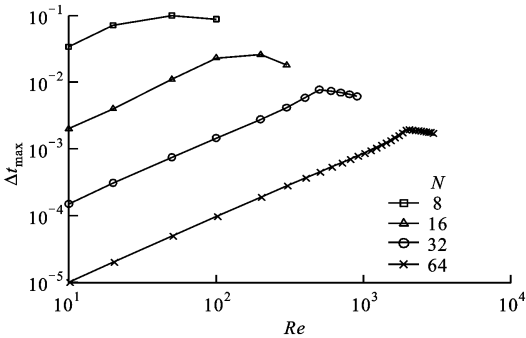


图 5 不同 N 时显式 RK3 格式的稳定性曲线

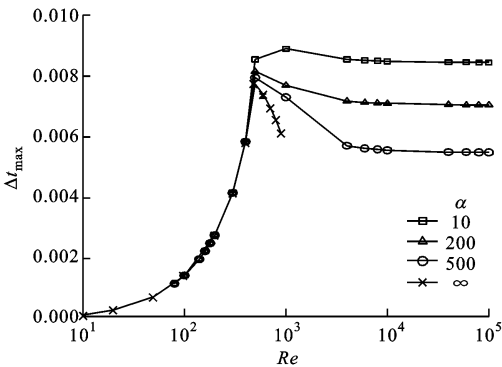


图 6 $N=32$ 时不同罚系数下显式 RK3 格式的稳定性曲线

表 3 $Re=2\,000$ 时显式 RK3 格式的计算误差与计算时间

N	α	$L_2^{50\,000}$	计算时间/s
8	1 000	发散	
	100	1.02×10^{-4}	3.38
	10	7.73×10^{-5}	3.39
16	1 000	发散	
	100	3.45×10^{-5}	6.67
	10	3.52×10^{-5}	6.69
32	10 000	发散	
	1 000	3.49×10^{-5}	14.38
	100	3.50×10^{-5}	14.45
	10	3.53×10^{-5}	14.41
	∞	3.69×10^{-5}	33.63
64	100 000	3.71×10^{-5}	33.55
	10 000	3.68×10^{-5}	33.58
	1 000	3.56×10^{-5}	33.52
	100	3.54×10^{-5}	33.53
	10	3.54×10^{-5}	33.55

Re 和高 Re 下均能保持高精度特性。

5 结 论

本文采用 Chebyshev 拟谱方法并结合罚方法处理边界条件分析了对流扩散方程拟谱格式在高 Re 下的稳定性、计算精度及计算时间,并与强制性的边界条件处理进行了对比,所得结论如下。

(1)拟谱方法在处理强约束边界条件时,稳定性条件比较苛刻,若不增加配置点数将无法计算高 Re 问题。

(2)用罚方法处理边界条件,可以将拟谱方法的稳定范围扩宽 1~3 个数量级,而且极大地提高了 Re 的计算上限。

(3)与强制性边界条件处理相比,罚方法处理边界条件同样能保证拟谱方法的高精度优势,在特定的格式(如 AB/BDI2 格式)下的计算时间亦能减少。

(4)研究工作为将罚方法拓展至三维非定常流动问题提供了参考。

参考文献:

- [1] GOTTLIEB D, ORSZAG S A. Numerical analysis of spectral methods: theory and applications [M]. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1977.
- [2] HAIDVOGEL D B. Resolution of downstream boundary layers in the Chebyshev approximation to viscous flow problems [J]. J Comput Phys, 1979, 33(3):313-324.
- [3] OLIVIER B. On the solution of the Navier-Stokes equations using Chebyshev projection schemes with third-order accuracy [J]. Computers & Fluids, 1997, 26(2): 107-116.
- [4] ZHENG Zheming, PETZOLD L. Runge-Kutta-Chebyshev projection method [J]. J Comput Phys, 2006, 219(2): 976-991.
- [5] ZHANG Wei, ZHANG Chuhua, XI Guang. An explicit Chebyshev pseudospectral multigrid method for incompressible Navier-Stokes equations [J]. Computers & Fluids, 2010, 39(1): 178-188.
- [6] ZHANG Chuhua, ZHANG Wei, XI Guang. A

pseudospectral multidomain method for conjugate conduction-convection in enclosures [J]. Numerical Heat Transfer; B, 2010, 57(4): 260-282.

- [7] FUNARO D, GOTTLIEB D. A new method of imposing boundary conditions in pseudospectral approximations of hyperbolic equations [J]. Mathematics of Computation, 1988, 51(184): 599-613.
- [8] HESTHAVEN J S. Spectral penalty methods [J]. Applied Numerical Mathematics, 2000, 33(1/2/3/4): 23-41.
- [9] 赵廷刚. Chebyshev-Legendre 拟谱方法解非经典抛物型方程 [J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(2): 147-149.
ZHAO Tinggang. Chebyshev-Legendre pseudo-spectral methods for solving nonclassical parabolic equations [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2006, 32(2): 147-149.
- [10] ZHANG Wen, MA Heping. The Chebyshev-Legendre collocation method for a class of optimal control problems [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2008, 85(2): 225-240.

[本刊相关文献链接]

- 不同球窝/球凸结构的旋转矩形通道传热及阻力特性研究. 2011,45(11): 52-57.
- 矩形通道内具有 Rayleigh-Benard 对流的湍流换热大涡模拟. 2011,45(6): 124-129.
- 超临界压力水在倾斜上升管内传热的试验研究. 2011,45(5): 6-11.
- 竖直狭缝通道内水沸腾换热的气泡动力学研究. 2010,44(11):12-16.
- 对流扩散方程的数值流形格式及其稳定性分析. 2010,44(1):117-124.
- 旋转矩形通道内湍流流动与换热的直接数值模拟. 2009,43(5):13-17.
- 竖直矩形窄通道空气自然对流换热特性的实验研究. 2009,43(3):10-13.
- 通孔金属泡沫中的空气自然对流传热实验研究. 2009,43(1):1-4.

(编辑 荆树蓉)